CI202 - Lista 3
Sistemas de Equações Lineares

Prof. Ricardo Oliveira

– Gauss-Jacobi: $X^i = JX^{i-1} + E$, com $J = -D^{-1}(S+I)$ e $E = D^{-1}B$
– Gauss-Seidel: $X^i = GX^{i-1} + F$, com $G = -(D+I)^{-1}S$ e $F = (D+I)^{-1}B$
– Sassenfeld: $\beta_i = \dfrac{\sum_{j=1}^{i-1} \beta_j |a_{ij}| + \sum_{j=i+1}^{n} |a_{ij}|}{|a_{ii}|}$

1. Escreva os seguintes sistemas de equações em suas formas matriciais:
   (a) $\begin{cases} 8x_1 = 42 \end{cases}$
   (b) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 4 \\ 5x_1 + x_2 = 9 \end{cases}$
   (c) $\begin{cases} 3x_3 + x_2 = 7 \\ 5x_1 - x_4 + 9 - 2x_2 = 2 \\ x_2 + \dfrac{x_3}{5} - 4x_2 = 0 \end{cases}$

2. Resolva cada sistema abaixo utilizando o Método de Gauss. Indique se o sistema é compatível determinado, compatível indeterminado ou incompatível.

   (a) $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{array}\right]$

   (b) $\left[\begin{array}{ccc|c} -4 & 2 & 5 & 8 \\ 6 & -3 & -1 & 4 \\ 9 & -1 & 2 & -3 \end{array}\right]$

   (c) $\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & 8 & 4 \\ -1 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right]$

   (d) $\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 8 & 10 & 4 \\ 1 & 4 & 5 & 2 \\ 6 & 24 & 30 & 12 \end{array}\right]$

   (e) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & 0 & 7 \\ -1 & 3 & 4 & 2 \end{array}\right]$

   (f) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 6 & 7 \end{array}\right]$

   (g) $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{array}\right]$

   (h) $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{array}\right]$

3. Resolva os sistemas abaixo utilizando o método de Gauss-Jordan:

   (a) $\left[\begin{array}{cc|c} -1.2 & 2.3 & 4.2 \\ 5 & -2 & -3.3 \end{array}\right]$

   (b) $\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 3 & 1.4 & 4 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ -4 & 0.5 & 7.6 & -1 \end{array}\right]$

4. Para cada sistema abaixo, fatore a matriz A em $A = LU$ utilizando a fatoração LU. Em seguida, resolva o sistema $Ax = B$ para cada vetor B dado, sem aplicar a eliminação de Gauss.

(a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \\ 6 & 2 & 3 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$.

(b) $A = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 5 \\ 6 & -3 & -1 \\ 9 & -1 & 2 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

(c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$.

5. Para cada sistema dado, verifique se a matriz de coeficientes é diagonal dominante. Caso não seja, encontre uma permutação de suas linhas e/ou colunas que o seja, se for possível.

(a) $\left[\begin{array}{cccc|c} -5 & 4 & -0.5 & 10 & -2 \\ 8 & 4.5 & -1.5 & -1 & 4 \\ -1 & -3.2 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -7 & -1 & 0 \end{array}\right]$

(b) $\left[\begin{array}{ccc|c} 8 & -4 & 2 & -4 \\ 1 & 5 & -3 & 3 \\ -2 & 5 & -9 & -1 \end{array}\right]$

(c) $\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -8 & 4 & 4 \\ -3 & 8 & 9 & -3 \\ -3 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right]$

6. Resolva cada sistema do exercício anterior utilizando o método de Gauss-Jacobi, utilizando como X_0 o vetor nulo e $\epsilon = 0.06$.

7. Para cada sistema abaixo, verifique se o critério de Sassenfeld é satisfeito. Caso não seja, encontre uma permutação das linhas e/ou colunas da matriz de coeficientes para tornar o critério satisfeito, se possível.

(a) $\left[\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & -3 & -2 \\ -3 & 6 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & -9 & 4 \end{array}\right]$

(b) $\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 9 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right]$

(c) $\left[\begin{array}{cc|c} 2 & -4.2 & 3 \\ 0.2 & -10 & -1.1 \end{array}\right]$

(d) $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \end{array}\right]$

8. Resolva cada sistema do exercício anterior utilizando o método de Gauss-Seidel, utilizando como X_0 o vetor nulo e $\epsilon = 0.005$.

9. Implemente, em C++, algum(ns) método(s) estudado(s) para resolver sistemas de equações lineares em um computador. Seus programas devem receber como entrada do usuário a forma matricial dos sistemas. Aproveite sua implementação do método de Gauss e Gauss-Jordan para escrever um programa que calcula o determinante de uma matriz quadrada, assim como sua matriz inversa.