CI202 - Lista 4
Interpolação

Prof. Ricardo Oliveira

- Lagrange: $P(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)L_k(x)$, com $L_k(x) = \prod_{0 \leq j \leq n, j \neq k} \frac{(x-x_j)}{(x_k-x_j)}$
- Newton:$P(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + ... + f[x_0, .., x_n](x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{n-1})$
- Diferenças divididas: $f[x_i, x_{i+1}, ..., x_{j-1}, x_j] = \dfrac{f[x_{i+1}, ..., x_{j-1}, x_j] - f[x_i, x_{i+1}, ..., x_{j-1}]}{x_j - x_i}$
- Diferenças ordinárias: $f[x_0, x_1, ..., x_n] = \dfrac{\Delta^n f(x_0)}{n!h^n}$, com $\Delta^n f(x) = \Delta^{n-1} f(x + h) - \Delta^{n-1} f(x)$

1. Considere a função $f(x)$ com os seguintes valores conhecidos:

x	7.6	16.3	60.6	69.8	73.9	95.4	99.3
$f(x)$	11	55.8	75.4	75.6	78.2	48.4	50.2

   Encontre os seguintes valores, utilizando interpolação linear:
   (a) $f(42)$
   (b) $f(65.2)$
   (c) $f(12.4)$
   (d) $f(83)$
   (e) $f(99.2)$
   (f) $f(99.3)$
   (g) $f(99.4)$
2. Considere a função $f(x)$ com os valores conhecidos apresentados no exercício anterior. Encontre os seguintes valores, utilizando interpolação quadrática:
   (a) $f(42)$
   (b) $f(65.2)$
   (c) $f(12.4)$
   (d) $f(99.2)$
   (e) $f(70)$
   (f) $f(60.6)$
   (g) $f(7.5)$
3. Considere a função $f(x)$ com apenas os seguintes valores conhecidos:

x	3	4	5
$f(x)$	1.042508	-0.14309	-0.56836

   (a) Encontre $f(3.5)$ usando a interpolação linear.
   (b) Encontre $f(3.5)$ usando a interpolação quadrática.
   (c) Sabendo que $f(x) = sen(x) - ln(x) + 2$, calcule o erro absoluto cometido em ambos os casos.
4. Prove que, conhecidos $n + 1$ valores $f(x_0), f(x_1), ..., f(x_n)$ com $x_0, x_1, ..., x_n$ distintos, existe um *único* polinômio $P(x)$ de grau até n tal que $P(x_i) = f(x_i)$ para todo $0 \leq i \leq n$.

5. Para cada função com os valores conhecidos abaixo, determine o respectivo polinômio interpolador de Lagrange:

   (a)

x	7	10
$f(x)$	2	4

   (b)

x	7	10	13
$f(x)$	2	4	8

   (c)

x	7	10	13	16
$f(x)$	2	4	8	16

6. Para cada polinômio determinado no exercício anterior, encontre o valor de $f(9)$. Além disso, sabendo que $f(x) = 2^{\frac{x-7}{3}+1}$, calcule o módulo do erro absoluto cometido em cada aproximação.
7. Para cada função com $n+1$ valores conhecidos dados abaixo, construa a tabela de diferenças divididas e encontre o polinômio interpolador de Newton de grau até n:

   (a)

x	-5	5
$f(x)$	0	3

   (b)

x	-3	4	6
$f(x)$	-2	1	-5

   (c)

x	5.1	19	64.9	94.2
$f(x)$	18.7	-22.3	38.1	-6.7

8. Utilizando os polinômios encontrados na questão anterior, calcule:
   (a) $f(0)$ para a função dada no item (a) da questão anterior.
   (b) $f(-1.5)$ para a função dada no item (b) da questão anterior.
   (c) $f(42)$ para a função dada no item (c) da questão anterior.
9. Para cada função com $n+1$ valores conhecidos dados abaixo, construa a tabela de diferenças ordinárias e encontre um polinômio interpolador de grau n utilizando a interpolação de Gregory-Newton:

   (a)

x	1	2
$f(x)$	1	2

   (b)

x	-3	0	3
$f(x)$	4.2	0	-5.3

   (c)

x	-1.2	1.3	3.8	6.3
$f(x)$	6.5	8	9.7	6.5

   (d)

x	-1	2	5	7	10
$f(x)$	0.1	2.1	-3.2	4.2	2.3

10. Utilizando os polinômios encontrados na questão anterior, calcule:
   (a) $f(0)$ para a função dada no item (a) da questão anterior.
   (b) $f(1.1)$ para a função dada no item (b) da questão anterior.
   (c) $f(4)$ para a função dada no item (c) da questão anterior.
   (d) $f(3.3)$ para a função dada no item (d) da questão anterior.

11. Considere a função $f(x)$ com os seguintes pontos conhecidos:

x	0	1	2	3
$f(x)$	0.540302	-0.416147	-0.653644	-0.1455

   (a) Encontre o valor de $f(0.5)$ pela interpolação linear, pela quadrática, pela de Lagrange, pela de Newton com Diferenças Divididas e pela de Gregory-Newton;

   (b) Sabendo que $f(x) = cos(2^x)$, calcule o módulo do erro absoluto gerado em cada caso do item anterior.

12. (Bônus para quem fez CI208) Escreva programas em C/C++ para interpolar valores utilizando algum(ns) do(s) método(s) estudado(s). Cada programa deve receber do usuário um inteiro n e n pares de valores $x_i, f(x_i)$, indicando que o valor de $f(x_i)$ é conhecido. Você pode assumir que o usuário sempre informará os valores de x_i em ordem crescente. Seu programa também deve receber do usuário um valor x. Seu programa deve então calcular e mostrar para o usuário um valor aproximado de $f(x)$, de acordo com o método de interpolação implementado.