CI202 - Lista 2
Zero de Funções

Prof. Ricardo Oliveira

- Método da Bisseção: $x_i = \frac{a+b}{2}$
- Método da Falsa Posição: $x_i = \frac{a \times f(b) - b \times f(a)}{f(b) - f(a)} = a - \frac{(b-a) \times f(a)}{f(b)-f(a)}$
- Método do Ponto Fixo: $x_i = g(x_{i-1})$
- Método de Newton-Raphson: $x_i = x_{i-1} - \frac{f(x_{i-1})}{f'(x_{i-1})}$
- Método da Secante: $x_i = x_{i-1} - \frac{(x_{i-1} - x_{i-2}) \times f(x_{i-1})}{f(x_{i-1}) - f(x_{i-2})}$

1. Utilize o teorema de Bolzano para provar que há uma raiz de $f(x)$ nos intervalos dados:
   (a) $f(x) = x^2 - 7$, $[2, 3]$
   (b) $f(x) = 4x^3 - 2x^2 + x - 2$, $[0, 1]$
   (c) $f(x) = \frac{x^3+3}{sen(x)}$, $[-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}]$
2. Para cada função $f(x)$ dada, encontre um intervalo $[a, b]$ tal que, pelo teorema de Bolzano, existe pelo menos uma raiz de $f(x)$ em $[a, b]$. Prove que sua resposta está correta.
   (a) $f(x) = 3x - 2$
   (b) $f(x) = 3x^2 - 2$
   (c) $f(x) = log_{10}(x - \sqrt{2})$
3. Para cada caso, utilize o método da Bisseção para encontrar a raiz de $f(x)$ no intervalo dado, com erro $\leq \epsilon$.
   (a) $f(x) = x^2 - 10$, em $[3, 4]$, $\epsilon = 0.01$
   (b) $f(x) = -x \times ln(2x)$, em $[0.2, 0.9]$, $\epsilon = 0.005$
   (c) $f(x) = \pi^x - 2\sqrt{x} - 3$ em $[1, 2]$, $\epsilon = 0.005$
4. Prove que o número de iterações no método da Bisseção é no máximo $\lceil log_2(\frac{b-a}{\epsilon}) \rceil$, onde $[a, b]$ é o intervalo inicial e ϵ o erro aceito.
5. Estime quantas iterações o método da Bisseção deve executar nos seguintes casos, para qualquer $f(x)$:
   (a) em $[1.0, 1.1], \epsilon = 0.05$
   (b) em $[0, 42], \epsilon = 3$
   (c) em $[-100, 100], \epsilon = 0.000001$
6. Prove que o método da Bisseção tem convergência linear.
7. Para cada função $f(x)$ dada, utilize o método da Falsa Posição para encontrar uma raiz de $f(x)$ no intervalo dado, com $|f(x_i)| \leq \epsilon$.
   (a) $f(x) = x^2 - 10$, em $[3, 4]$, $\epsilon = 0.01$
   (b) $f(x) = -x \times ln(2x)$, em $[0.2, 0.9]$, $\epsilon = 0.005$
   (c) $f(x) = \pi^x - 2\sqrt{x} - 3$ em $[1, 2]$, $\epsilon = 0.005$
8. Para cada função $f(x)$ dada, utilize o método da Falsa Posição para encontrar uma raiz de $f(x)$ no intervalo dado, com $|x_i - x_{i-1}| \leq \epsilon$.
   (a) $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x+2}} - 2e$, em $[-1, 4]$, $\epsilon = 0.001$

(b) $f(x) = \frac{cos(x)}{\pi^x}$, em $[-2, 1]$, $\epsilon = 0.1$

9. Prove ou dê um contra-exemplo para a seguinte afirmação: "O método da Falsa Posição sempre executa em número de iterações menor ou igual que o método da Bisseção, para a mesma função $f(x)$, mesmo intervalo inicial e mesmo erro admissível".
10. Para cada função $f(x)$ dada, encontre uma função de iteração $g(x)$ e verifique se o método do Ponto Fixo converge com sua função encontrada, para o valor de x_0 dado:
    (a) $f(x) = 3x - 2$, com $x_0 = 42$
    (b) $f(x) = x^2 - 4x + 1$, com $x_0 = 3$
    (c) $f(x) = x^2 - 4x + 1$, com $x_0 = 32$
11. Para cada caso, encontre uma raiz de $f(x)$ dentro de $[a, b]$ usando o método do Ponto Fixo, com a função de iteração $g(x)$ e com $|x_i - x_{i-1}| \leq \epsilon$. Indique o melhor valor para x_0, e indique também se a convergência é monotônica ou oscilante.
    (a) $f(x) = \frac{x^4}{4} - x + 0.5$, $g(x) = \frac{x^4}{4} + 0.5$, em $[0.1, 0.9]$, com $\epsilon = 0.001$
    (b) $f(x) = x^2 + 3x - 40$, $g(x) = \sqrt{40 - 3x}$, em $[4.5, 5.5]$, com $\epsilon = 0.0001$
    (c) $f(x) = x^2 + 2x - sen(x) - 1.5$, $g(x) = \frac{-x^2 + sen(x) + 1.5}{2}$, em $[0, 1]$, com $\epsilon = 0.001$
12. Para cada função $f(x)$ dada, encontre sua raiz usando o método de Newton com x_0 dado e com $|x_i - x_{i-1}| \leq \epsilon$:
    (a) $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + 4$, $x_0 = -2$, $\epsilon = 0.01$
    (b) $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + 4$, $x_0 = 0$, $\epsilon = 0.01$
    (c) $f(x) = x^3 - 2x + 2$, $x_0 = 0$, $\epsilon = 0.001$
    (d) $f(x) = x^3 - 2x + 2$, $x_0 = -3$, $\epsilon = 0.001$
    (e) $f(x) = e^x - sen(x) - 1.5$, $x_0 = 1$, $\epsilon = 0.001$
13. Se f, f' e f'' são definidas e contínuas em um intervalo $[a, b]$; se $f(a)f(b) < 0$; se $f'(x) \neq 0 \forall x \in [a, b]$; e $f''(x)$ tem o mesmo sinal para todo $x \in [a, b]$, então o método de Newton tem convergência monotônica se $x_0 = a$ ou b tal que $f(x_0)f''(x_0) \geq 0$. Escolha o valor de x_0 e prove que o método de Newton tem convergência monotônica, sem aplicá-lo, para $f(x) = x^3 - x^2$ em $[0.8, 1.2]$.
14. Utilize o Método da Secante para encontrar a raiz de $f(x)$, com aproximações iniciais dadas e com $|x_i - x_{i-1}| \leq \epsilon$:
    (a) $f(x) = 2x^2 - 3x - 4$, $x_0 = -1, x_1 = 0$, $\epsilon = 0.001$
    (b) $f(x) = 2x^2 - 3x - 4$, $x_0 = 2, x_1 = 3$, $\epsilon = 0.001$
    (c) $f(x) = \pi^x - cos(x) - \sqrt{x}$, $x_0 = 0.2, x_1 = 0.8$, $\epsilon = 0.001$
15. Encontre *todas* as raízes reais das seguintes equações, utilizando o(s) método(s) que desejar:
    (a) $2x - 42 = 0$
    (b) $x^2 + x - 2 = 0$
    (c) $x^3 - 3x^2 - 18x + 40 = 0$
    (d) $x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 14x + 24 = 0$
16. (Bônus opcional para quem fez CI208) Implemente alguns dos métodos estudados em um programa de computador, e note que utilizar o computador como ferramenta-base pode facilitar nosso trabalho, quando comparado com o trabalho para realizar os cálculos em uma calculadora não programável.